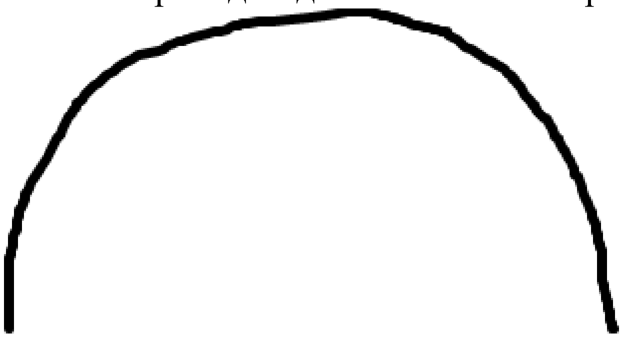
КРИВЫЕ и принцип наименьшего действия

Рассмотрим конечную кривую в пространстве R^3. Будем считать, что она непрерывная, гладкая и т.д. (не будем давать строгие определения, надеясь на интуицию читателя).
Как нам, кстати, её задать? Один из способов – взять отрезок [a..b] и рассмотреть функцию **r**(σ), w меняется от a до b. Это так называемое параметрическое задание (параметр σ), его и будем использовать.

Отметим, что одной и той же кривой может соответствовать несколько параметризаций.
Например, для полуокружности приведём две возможные параметризации:



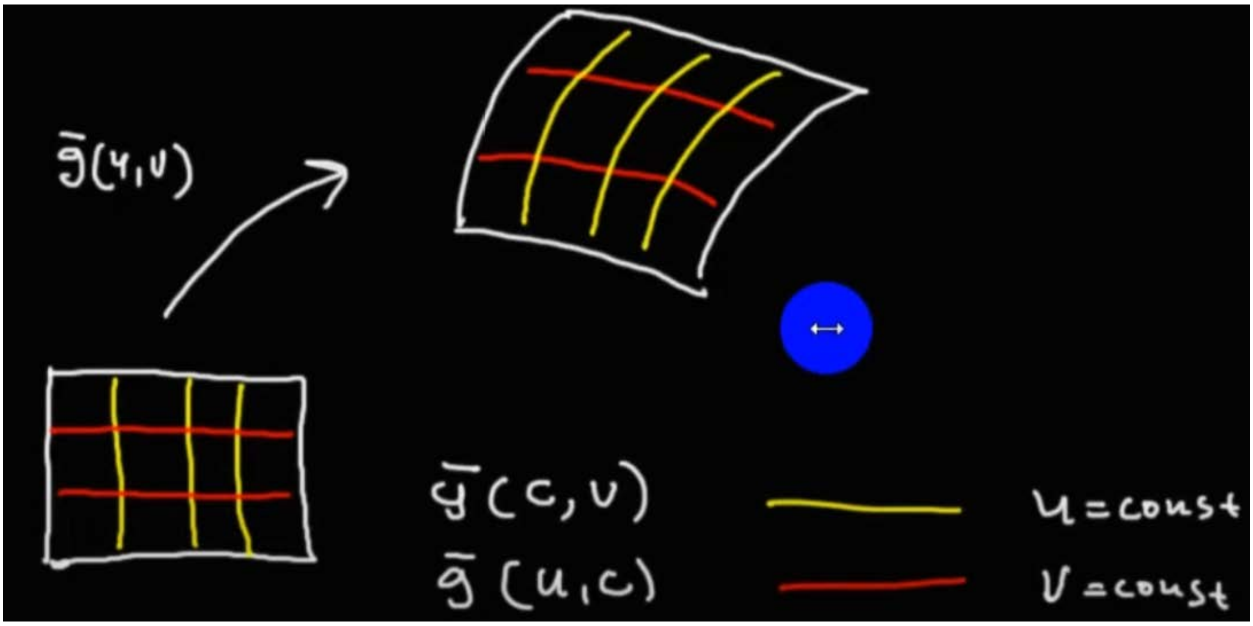
$$t \in [-R..R]$$
$$x = t$$
$$y = \sqrt{R^2-t^2}$$

$$t \in [0..\pi]$$
$$x = R\cos t$$
$$y = R\sin t$$

Так что кривая «выше» понятия параметризации – параметризаций много, а кривая одна.

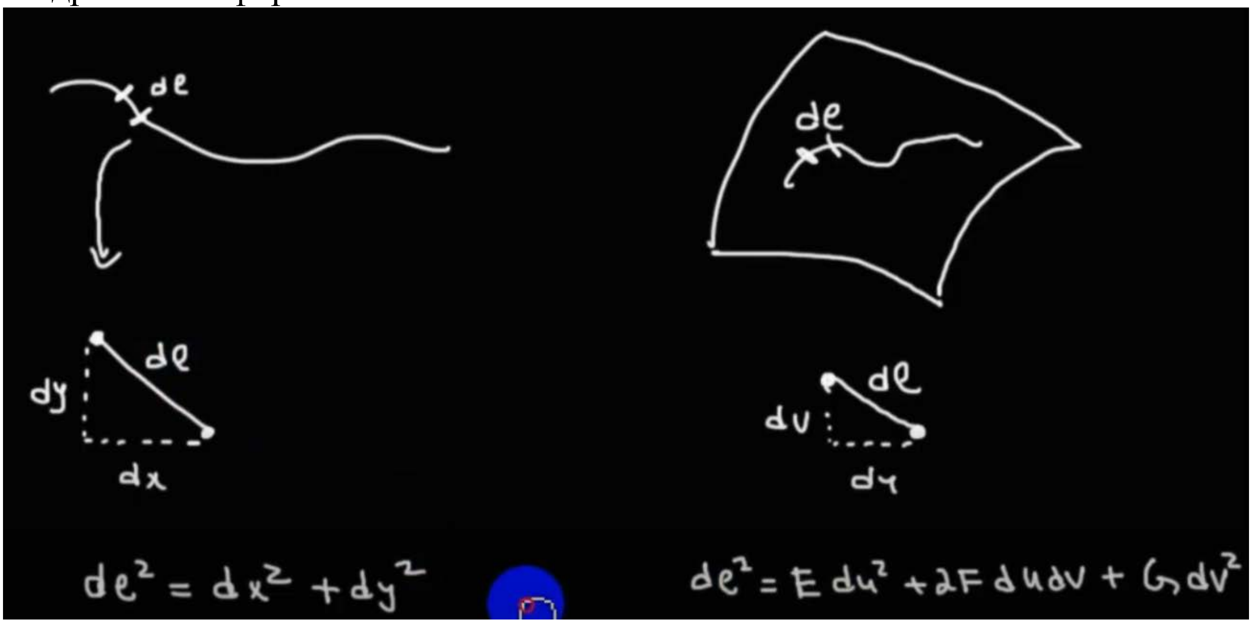
ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим поверхность в пространстве R^3. Как её задать? Например, также параметрически:
У нас есть плоский прямоугольник с переменными u и v. Мы вводим вновь функцию **r**(u,v), которая каждой паре своих точек сопоставляет точку на поверхости:

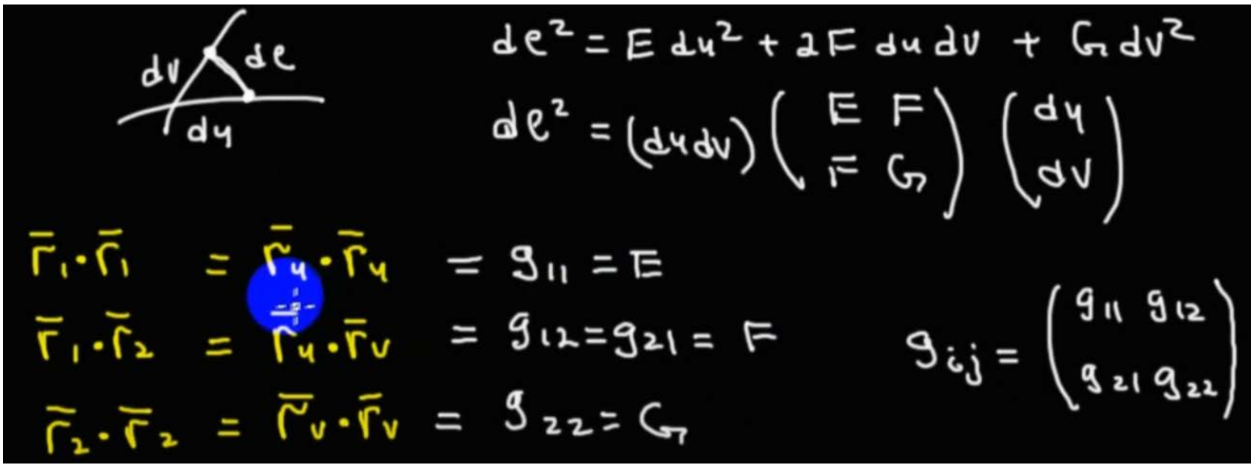


На поверхности мы также можем ввести координатную сетку из линий u=const и v=const (однако в общем случае они могут быть не перпендикулярны).

Теперь научимся считать длины кривой на нашей поверхности.
Давайте отступим на нашей поверхности на dv вдоль жёлтой линии – получим точку. Теперь отступим от исходной точки на du вдоль красной линии – получим ещё точку. Какое будет расстояние между ними?
Если бы жёлтые и красные линии были бы перпендикулярны, то оно бы находилось по теореме Пифагора. Однако в общем случае они не перпендикулярны, и оно будет корнем из так называемой первой квадратичной формы:



Коэффициенты E, F и G в каждой точке поверхности свои, т.е. являются функциями u и v.
Отметим, что первую квадратичную форму можно записать в матричном виде



Матрицу

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

часто называют метрической матрицей или просто метрикой (матрицей метрического двензора).

Теперь зачем это всё нужно?
Геодезическая – такая кривая на нашей поверхности, что какие бы точки А и В мы на ней взяли, участок кривой между ними будет кривой наименьшей длины на нашей поверхности.

Вы наверняка знаете, что по геодезическим летают самолёты… Если вдруг не знали, посмотрите этот https://etudes.ru/etudes/geodesic/ ролик.

И в этот момент вы должны схватить суть ОТО.

Ньютон сказал:
Тело само по себе движется по прямой и равномерно.
И это был прям фундаментальный закон - первый закон Ньютона.

Мы чуть-чуть его проапгрейдим:
Тело само по себе движется по геодезической и равномерно.
Или, в релятивистской терминологии:
Мировая линия тела – геодезическая.

Т.е. тела движется настолько прямо, насколько позволяет та поверхность, на которой оно находится.

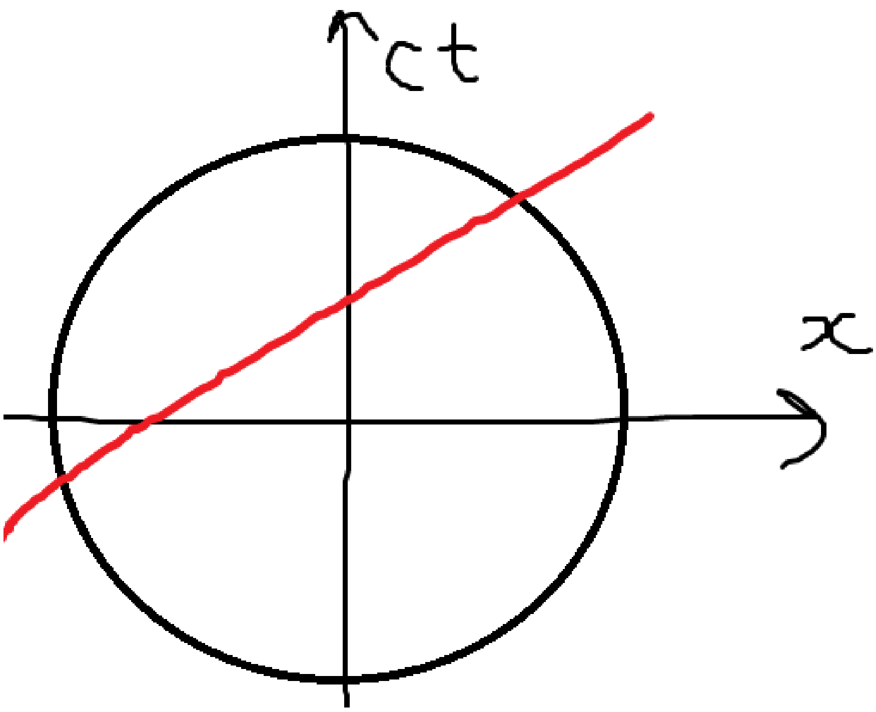
Рассмотрим, например, полусферу. Геодезическая на ней будет дугой. Наблюдатель, живущий на сфере, не знает, что он живёт на сфере, и будет считать, что это круг, а геодезическую назовёт прямой (отрезком).
(Будем считать, что скорости, с которыми может двигаться наблюдатель, очень малы и он не может за вменяемое время доползти до края полусферы, что сразу бы ему сказало о том, что он живёт на сфере. Мы тоже сидим на

своей Земле и корабли наши, знаете ли, побывали лишь в малой части Вселенной).

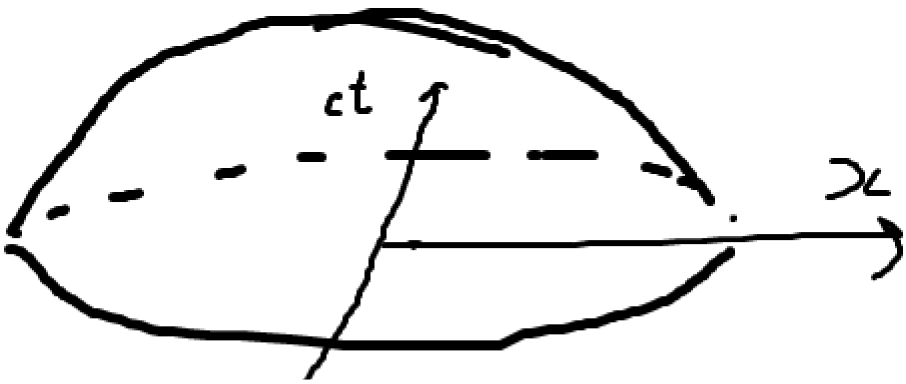
Но мы, живущие в 3D и смотрящие на полусферу, знаем, что полусфера – это не совсем круг. На самом деле наблюдатель на полусфере тоже может об этом догадаться, потому что тело будет двигаться как-то странно. И он, проанализировав эти странности, сделает вывод о кривизне своей поверхности (сферы) и додумается до ОТО ☺

У нас точно так же. Можно считать, что реальный мир – это обычное неискривлённое R^5, в которое вложено 4-мерное пространство-время, которое искривлено находящими там частицами.
Все движется в нём по геодезическим, но т.к. пространство-время искривлено, то и геодезические своеобразное.

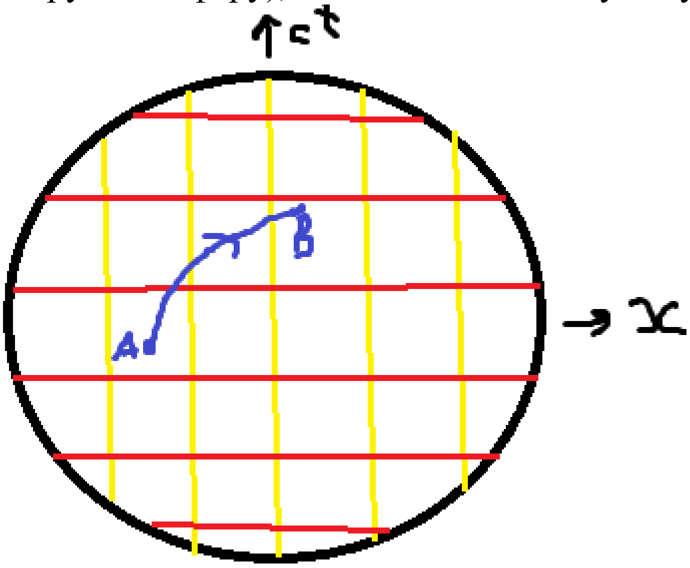
Пусть у нас был круг. На нём геодезической была прямая:



Что соответствовало равномерному прямолинейному движению вдоль оси x.
В силу каких-то причин он искривился до полусферы

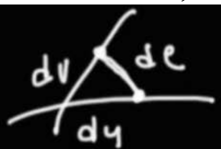


И если мы на ней сохраним старую координатную сетку (т.е. спроектируем её с круга на сферу), то геодезической будет уже дуга (синяя дуга)



Что вызывет явные непонятки у нашего 2D-наблюдателя. Вероятно, он изобретёт какие-то костыли вроде закона всемирной гравитации. Хорошо, что мы трёхмерные и понимаем, что он на самом деле сидит на сфере.

А как нам найти геодезическую? Минимизировать длину. Только она будет уже не $\int_A^B dl$, а



$$dl^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$dl^2 = (du\,dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_1 = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = g_{11} = E$$

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = g_{12} = g_{21} = F \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_2 = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = g_{22} = G$$

$$\int_A^B \sqrt{g_{11}\,du^2 + 2g_{21}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2}$$

.

Давайте, чтобы было ещё понятнее, перейдём от u и v к четырёхмерному пространству-времени и будем считать длину геодезической там.
Пускай у нас есть события A и B. Длина кривой тогда будет

$$S = \int_A^B ds$$

Удобно взять какую-либо параметризацию кривой и интегрировать по ней. Например, можно взять время. Тогда будет:

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \frac{ds}{dct} dct$$

Величина $\frac{ds}{dct}$ называется лагранжианом ☺ Узнали? Вот оно ☺

Мы могли бы и записать так:

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \frac{ds}{dx} dx$$

И так (cτ здесь и далее – собственное время):

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \frac{ds}{dc\tau} dc\tau$$

Но удобнее всего выбирать в качестве параметра обычное время ct.

Получим для L хорошо знакомую формулу через кинетическую энергию (будем считать, что потенциальной нет).

$$ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{dct^2 - d\boldsymbol{r}^2} = dct\sqrt{1 - d\boldsymbol{r}^2/dct^2} = dct\sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{dr}}{dct}\right)^2}$$

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{dr}}{dct}\right)^2}\, dct$$

В нерелятивистском случае

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B (1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{dr}}{dct}\right)^2)dct$$

Что разбивается на 2 интеграла:

$$S = \int_A^B dct - \int_A^B \frac{\beta^2}{2} dct$$

Первый равен константе (так как разность времён событий A и B фиксирована), а второй и есть кинетическая энергия. Вот мы и получили L=-T. Кстати, а почему минус? Только потому, что сигнатура метрики (1, -1, -1, -1). Взяли бы иначе – получили бы +T (как было на теормехе). Но лучше как раз –T.

А что, если появляется некое поле в каждой точке пространства-времени (**r**, t)? Не важно, какое – электромагнитное или гравитационное. Тогда оно поменяет метрику, т.е. g_{ik} будет иметь уже нетривиальный вид. Не вот такой вот

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

А какой-то другой – возмущённый.

Итак, длина геодезической считается

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\sum_{l=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} g_{lm} dx^l dx^m}$$

Если опять взять в качестве параметра dct, то получим

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\sum_{l=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} g_{lm} \frac{dx^l}{dct} \frac{dx^m}{dct}} dct$$

Но можно брать и любой другой параметр σ:

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\sum_{l=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} g_{lm} \frac{dx^l}{d\sigma} \frac{dx^m}{d\sigma}} d\sigma$$

Напомню, σ является параметром кривой, если все 4 координаты через него выражаются: $x^0(\sigma), x^1(\sigma), x^2(\sigma), x^3(\sigma)$.

Например, можно взять собственное время cτ:

$$S=\int_A^B ds=\int_A^B \sqrt{\sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} g_{lm}\frac{dx^l}{dc\tau}\frac{dx^m}{dc\tau}}dc\tau$$

Про массу

Дотошный читатель скажет, что в

$$S=\int_A^B dct-\int_A^B \frac{\beta^2}{2}dct$$

$\frac{\beta^2}{2}$ – это не совсем кинетическая энергия. Кин.энергия была бы $\frac{m\beta^2}{2}$.

Так вот, когда у нас одно тело, масса постоянный множитель, который мы можем без проблем опустить. Мы так и будем делать, считая лагранжиан безразмерным, а действие S размерным длине (логично: это длина геодезической).